

第六章 得了一只羊

我唯一的建议是，如果我给你 5000 美元让你不要开门的话，那你就拿了这钱回家去吧。

——蒙迪·霍尔 (Monty Hall)

尽管数字是埃尔德什的亲密朋友，他偶尔也会判断失误。他的直觉不错，但也不总是很准确的。的确，上次他去拜访瓦兹索尼（当时瓦兹索尼退休在家，住在加利福尼亚葡萄酒之乡）时，就陷入了玛里琳·沃斯·萨万特（Marilyn vos Savant）在《检阅》(Parade) 杂志的栏目“请问玛里琳”中的一道动脑筋难题中。萨万特宣称自己是记录在案的具有最高智商的人。根据《吉尼斯世界纪录大全》记载，她的智商高达 228。她炫耀地戴着一枚用于“雅维克人工心脏”的特殊材料做的钻戒，这种材料是她的丈夫罗伯特·雅维克（Robert Jarvik）发明的。她在数学界的名望并未因她的《世界上最著名的数学问题》(The World's Most Famous Math Problem, 1993) 一书而有所提高。在这本书里，她对费马大定理的怀尔斯证明和爱因斯坦的相对论提出质疑。人们把“请问玛里琳”描绘成一种启迪大脑的“来自埃洛伊兹的启示”栏目，里面有许多地方涉及数学。一些人不喜欢她是因为忌妒她：她在《检阅》杂志里办的这个栏目每星期天都有成百上千万的人阅读，同时她的书和演讲也为她挣了许多钱。相比之下，许多职业数学家却从未从自己的书里挣到 1 分钱。

沃斯·萨万特在 1990 年 9 月 9 日的栏目里回答了她的一位读者提出的一道著名的动脑筋难题。你正在参加一个电视游戏表演节目，有三扇门任你选择。其中的一扇门后面有一辆小汽车，另外两扇门后面都是一只羊。比方说你选择 1 号门，接着，知道哪扇门后面有汽车的主持人打开了另一扇门，这扇门后是一只羊。现在，主持人再给你一个选择：是坚持开 1 号门还是开另一扇门？你怎么选？

这就是嘉宾们在蒙迪·霍尔的经典电视游戏节目“决断”中遇到的所谓蒙迪·霍尔难题，只不过安慰奖不是羊罢了。沃斯·萨万特建议写信人开另一扇门。她说坚持第一次的选择只有 $\frac{1}{3}$ 的赢的机会，但是换一下机会就增加了一倍，变成 $\frac{2}{3}$ 了。为了说服读者，她请他们想像一下有 100 万扇门，她说，“你选择 1 号门，而主持人知道门后有什么，他总是避开有奖的那扇门，除了比方说第 777777 号门以外，把别的门都打开了。这时你会毫不犹豫地换到另外一扇门，是吧？”

情况显然并非如此。她的这一栏目刚一发表，就受到持不同意见的读者来信围攻，这些读者中还包括许多数学家。他们坚持认为就是换一个选择，机会也只有 $1/2$ ，而不是 $2/3$ 。沃斯·萨万特在 1990 年 12 月 2 日的栏目里登出其中的一些来信：

作为一位职业数学家，我对公众缺乏数学能力的状况很担忧，请积点德吧，承认你的错误……

乔治·梅森大学罗伯特·萨克斯 (Robert Sachs) 博士

你吹牛吹破天了！让我来解释吧：在主持人打开有羊的门后，选对的机会是 1 比 2。无论你改不改主意，机会都是同样的。这个国家的数学盲已经够多的了，我们不需要世界上智商最高的人再来帮倒忙。不知羞耻！

佛罗里达大学司各特·史密斯 (Scott Smith) 博士

这一次，沃斯·萨万特为了使她的分析深入透彻，制了一张表，其中罗列了所有可能的结果：

1 号门	2 号门	3 号门	结果 (选择一号门且坚持不变)
汽车	羊	羊	赢
羊	汽车	羊	输
羊	羊	汽车	输

1 号门	2 号门	3 号门	结果 (选择一号门然后改变主意)
汽车	羊	羊	输
羊	汽车	羊	赢
羊	羊	汽车	赢

她说，这张表显示了“你若换一扇门，赢的机会是 $2/3$ ，而输的机会是 $1/3$ ；但是如果你不换门，则赢的机会只有 $1/3$ ”。

但是这张表没有使她的批评家们沉默。她在此专题的第三次专栏 (1991 年 2 月 17 日) 中写道，她收到的成千上万封信中有十分之九是反对她的，其中还包括来自美国国家卫生研究院的一位统计学家和国防信息中心的一位副主任的指责。这些信言辞激烈，说她本人就是一只笨羊，还说女人看待数学问题时和男人不同。“关于那个游戏节目数学问题，你是彻头彻尾地错了，”乔治顿大学的 E·雷·博博 (E. Ray Bobo) 博士写道，“并且我希望这场论战能够引起公众注意到全国范围内数学教育的严重危机。如果你能承认错误，你就会为改变这个令人痛心的状况作出建设性的贡献。究竟需要多少愤怒的数学家才能改变你的想法呢？”

“当现实与直觉发生激烈冲突时，”萨万特在她的栏目中回复道，“人们就不知所措了”，这一次她试着用另一种方法。想像一下，她说，就在主持人打开那扇门，门后出现一只羊时，一个不明飞行物降落在舞台上，接着出现了一个绿色的小个子女人。她并不知道你原先选的是哪扇门，我们请她在两扇没有打开的门当中选一扇，那么她随意选中小汽车的机会是一半对一半。“但是这是因为她没有原先那个参赛者的优势——主持人的帮助……如果奖品是在 2 号门后面，主持人给你显示 3 号门；如果奖品是在 3 号门后面，主持人给你显示 2 号门。因此当你变换一下选择时，如果奖品是在 2 号门或 3 号门后面你都会赢！但是你若不换门的话，奖品只有在 1 号门后面你才会赢。”萨万特完全正确，正如那些迂腐的数学家们最终不得不承认的那样。

瓦兹索尼把有关蒙迪·霍尔难题的情况告诉了埃尔德什。“我告诉埃尔德什答案是换一扇门，”瓦兹索尼说道，“然后满以为可以转到下一个话题。可令我吃惊的是，埃尔德什说：‘不，那

不可能。换不换门应该没什么不同。’这时我对提出这个问题感到后悔，因为我有这样的经历，即人们会因这个答案而变得很激动，从而使得我们的谈话不欢而散。在根本就不可能从容了结此事的情况下，我给他画了一个我在大学的《量化管理技术》上学到的树形分析结果。”瓦兹索尼画出分析树，与萨万特曾经制作的那张罗列可能结果的表格不无相似之处，但这并没有说服他。“真是没办法，”瓦兹索尼说道，“我告诉埃尔德什这一点，然后走开了。1 个小时之后，他又回来找我，非常生气的样子。‘你还没有告诉我为什么要换门，’他说，‘你是怎么回事？’我说我很抱歉，但是我真的不知道结果为什么会是这样，只是树形分析结果说服了我。他变得更加烦躁起来。”瓦兹索尼以前曾经见过这种反应，是在他的学生身上，但他怎么也不会想到 20 世纪最多产的数学家也会有这种反应。

“物理学家总是相信概率是与事物相联系的，”瓦兹索尼说道，“就拿硬币来说。我们知道扔硬币时正面朝上的概率是 $1/2$ ，而物理学家似乎认为这个 $1/2$ 概率是与硬币相关的。这是硬币本身的性质，是物理现象。但是假设我拿一枚硬币扔了 100 次，每次总是反面朝上。我们就会说出了问题了，硬币是假的。事实上硬币本身并没有变，它还是当初我扔的那枚硬币。但为什么我们改变主意了呢？因为我们的脑子得到了新的信息。这就是贝叶斯的概率观。我费了不少功夫才理解概率是一种思维状态。我猜想埃尔德什也有这种概率与具体事物相关的观点，因此他才理解不了换门有什么意义。”

瓦兹索尼退休后的住所位于高尔夫球场的边上，当埃尔德什琢磨那道蒙迪·霍尔难题和考虑上帝才知道的其他许多猜想时，“他坚持要在球场边上走，”劳拉·瓦兹索尼说道，“那儿到处都有标志警告人们不要在球场边上走，因为高尔夫球会像子弹一样击中行人。我们试图阻止他，但是他不太容易被说服。他从来不愿意他自由受到任何限制。”

当埃尔德什散步回来时，瓦兹索尼已经解决了这道蒙迪·霍尔难题。他用的是埃尔德什的新朋友乌拉姆发明的一种新方法：蒙特卡罗法。1946 年，当乌拉姆的脑炎正逐渐康复时，他玩了大量的单人纸牌游戏。“在花了大量时间试图通过单纯的组合计算来估计特定纸牌组合的概率之后，我想难道就没有一个比‘抽象思维’更实用的方法吗？要是多次发牌，比如说 100 次，然后只要数出成功的牌局数不就可以了吗？”乌拉姆回忆道，“随着高速计算机时代的开始，这样的构想早已成为可能。我马上想到中子扩散问题和其它的一些数学物理问题，并且推而广之更想到如何将微分方程式描绘的步骤转换成能够用一系列随机过程解释的等效形式。”蒙特卡罗法是为了纪念乌拉姆的一位亲戚而命名的，他总是偷偷地溜到蒙特卡罗去玩轮盘赌。此法的思路是通过在电脑上随意模拟某一事件而计算出发生此事的概率，而不是通过解方程式的办法来计算。换句话说，为了计算单人纸牌游戏中某一特定组合的概率，只需让电脑随机发出几百副牌，然后数出出现给定组合的概率就行了。

瓦兹索尼在他的个人电脑上用了蒙特卡罗法模拟蒙迪·霍尔难题。从来都不怎么用电脑的埃尔德什，现在却看着电脑随机地在“换门”和“不换门”之间作出选择。数百次的试验结果证明，换门时赢的概率是不换门的 2 倍，这时埃尔德什才不得不承认自己错了。但这种哦你模拟并不比用计算机证明四色定理更令人满意：它没有揭示为什么换一下门会更好一些。埃尔德什对瓦兹索尼的解释还是不够满意。他准备走了。

这次是瓦兹索尼和埃尔德什的最后一次见面。埃尔德什想要瓦兹索尼开车送他去旧金山国际机场，这需要 2 个小时。

“我不想去，”瓦兹索尼告诉他说，“太远了。”

“那我怎么去那儿？”埃尔德什说。

“我把你送上车。”

“那没用。”

“为什么？”

“下车后，我怎么办？”

“你下车后，司机会帮你把行李放到人行道上，在联合航空公司的前台回有一个态度友好的人。你把机票给他看，然后他会帮你拿走行李。”

埃尔德什不乐意自己单独去机场，但最后还是同意了。“他后来打了电话过来，”瓦兹索尼说道，“并说自己去机场也是一样的。他只是太习惯于被人照顾了。他原以为自己单独一个人会什么也做不了呢。他母亲把他从小带到大，他就这样习以为常了。”

埃尔德什一直念念不忘蒙迪·霍尔问题。他跟格雷厄姆打电话问他有什么“天书”上的证明。格雷厄姆回答说：“蒙迪·霍尔问题的关键是主持人总是存心给你换门的机会，这就是游戏规则的一部分。在你思考这一问题时必须考虑到这一点。”埃尔德什接受了格雷厄姆的解释。